知识点 ‖ 双曲线的定义

平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线(hyperbola).

这两个定点叫做双曲线的焦点,两焦点间的距离叫做双曲线的焦距.

双曲线定义的集合描述

设点 M 是双曲线上任意一点,点 F_1,F_2 是双曲线的焦点,则由双曲线的定义可知,双曲线可以视为动点 M 的集合,即点集 $P=\{M \mid ||MF_1|-|MF_2||=$常数,常数大于 0 且小于$|F_1F_2|\}$.

1. 已知平面上定点 F_1, F_2 及动点 M,命题甲:$||MF_1|-|MF_2||=m$(m 为常数),命题乙:点 M 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的双曲线,则甲是乙的

答案 ▶ B

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

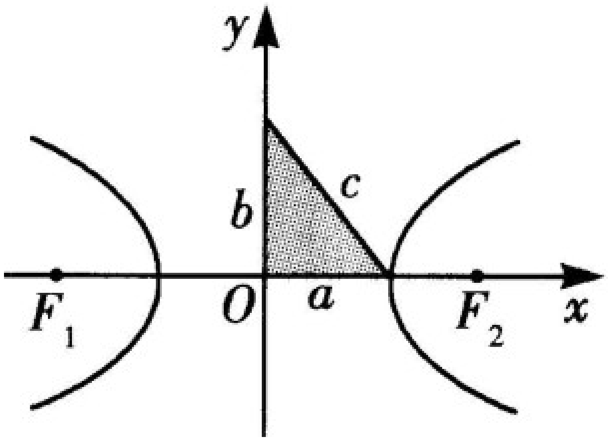
D. 既不充分也不必要条件

知识点 ‖ 双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$$



2.已知双曲线方程为 $x^2-2y^2=1$，则它的右焦点坐标为

答案▶C

A. $(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$　　B. $(\frac{\sqrt{5}}{2},0)$

C. $(\frac{\sqrt{6}}{2},0)$　　D. $(\sqrt{3},0)$

3.下面各选项中的双曲线，与 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$ 共焦点的双曲线是

答案▶C

A. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{14}=1$　　B. $\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{26}=1$　　D. $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{26}=1$

知识点3 || 双曲线方程的其他形式

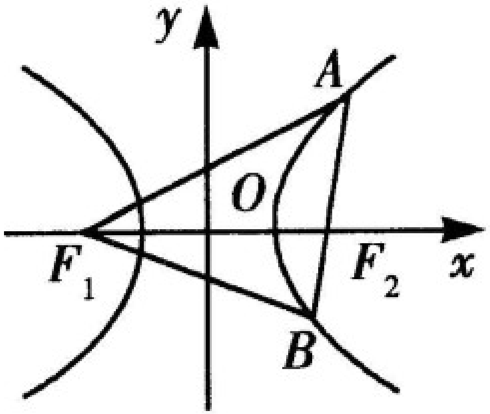
共焦点的双曲线系方程

与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$有公共焦点的双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1(a>0,b>0,-a^2<\lambda<b^2)$；与双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$有公共焦点的双曲线的方程为$\frac{y^2}{a^2+\lambda}-\frac{x^2}{b^2-\lambda}=1(a>0,b>0,-a^2<\lambda<b^2)$.

知识点4 || 双曲线的焦点三角形问题

$$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}.$$

4. 如图 2.3.1－5，已知双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$），点 A,B 均在双曲线的右支上，线段 AB 经过双曲线的右焦点 F_2，$|AB|=m$，F_1 为双曲线的左焦点，则$\triangle ABF_1$ 的周长为　**答案**▶B



A. $2a+2m$　　B. $4a+2m$

C. $a+m$　　D. $2a+4m$

5. 已知$\frac{x^2}{1-k}-\frac{y^2}{|k|-3}=-1$，当 k 为何值时，

(1)方程表示双曲线？　-3 或 $1<k<3$

(2)方程表示焦点在 x 轴上的双曲线？　$1<k<3$

(3)方程表示焦点在 y 轴上的双曲线？　$k<-3$

6. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

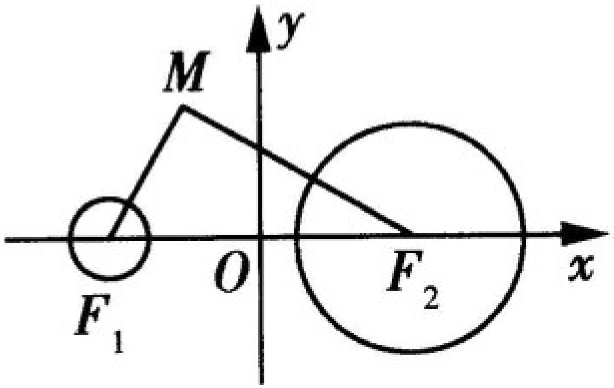
(1) $a=3$，$c=4$，焦点在 x 轴上；

(2) 焦点为 $(0,-6)$，$(0,6)$，经过点 $A(-5,6)$；

(3) 以椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 长轴的端点为焦点，且经过点 $(3,\sqrt{10})$.

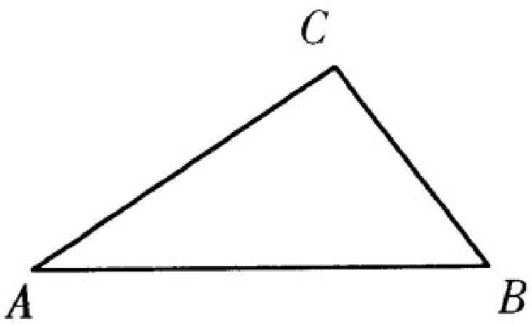
$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$ $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{20}=1$ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{5}=1$

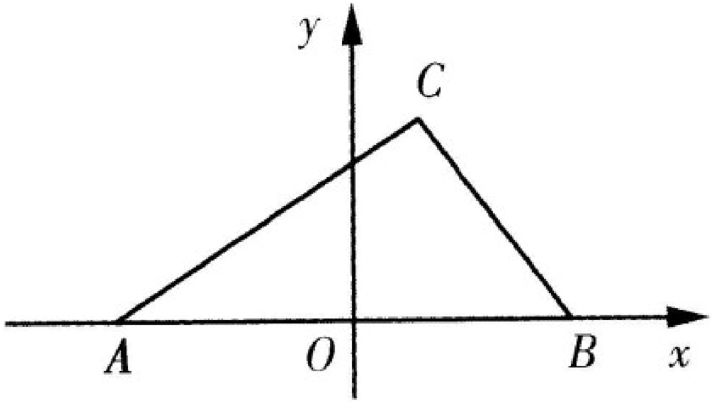
7. 如图 2.3.1－6 所示，已知定圆 F_1：$x^2+y^2+10x+24=0$，定圆 F_2：$x^2+y^2-10x+9=0$，动圆 M 与定圆 F_1，F_2 都外切，求动圆圆心 M 的轨迹方程.



$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{91}{4}}=1\left(x\leqslant-\frac{3}{2}\right)$$

8. 如图 2.3.1－7，在△ABC 中，已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，且三内角 A,B,C 满足 $2\sin A+\sin C=2\sin B$，建立适当的坐标系，求顶点 C 的轨迹方程.





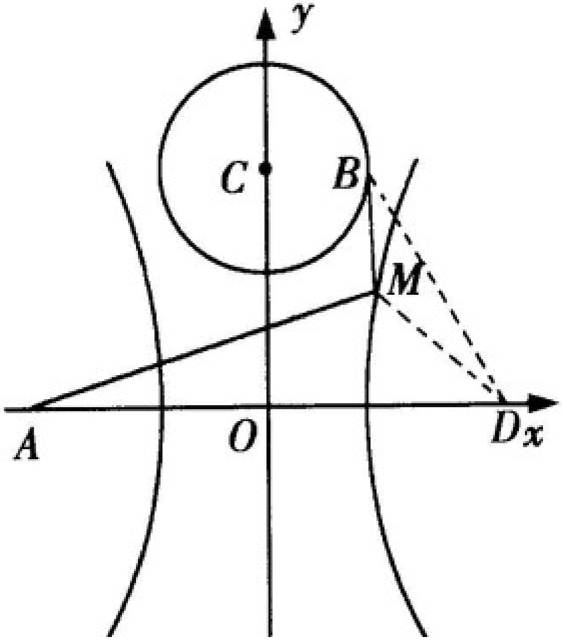
$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1\left(x>\sqrt{2}\right)$$

9. (2012·辽宁)已知双曲线 $x^2-y^2=1$，点 F_1,F_2 为其两个焦点，点 P 为双曲线上一点，若 $PF_1\perp PF_2$，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的值为____4____.

10. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点，$P(3,1)$ 为双曲线内一点，点 A 在双曲线的右支上，则 $|AP|+|AF_2|$ 的最小值为　　**答案**▶C

A. $\sqrt{37}+4$　B. $\sqrt{37}-4$　C. $\sqrt{37}-2\sqrt{5}$　D. $\sqrt{37}+2\sqrt{5}$

11. 已知双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，如图 2.3.1－10 所示，点 A 的坐标为 $(-\sqrt{5},0)$，B 是圆 $x^2+(y-\sqrt{5})^2=1$ 上的点，点 C 为其圆心，点 M 在双曲线的右支上，求 $|MA|+|MB|$ 的最小值.



解析▶ 设点 D 的坐标为 $(\sqrt{5},0)$，则点 A,D 是双曲线的焦点，如图 2.3.1－10，连接 MD,BD，由双曲线的定义，得 $|MA|-|MD|=2a=2$.

$\therefore |MA|+|MB|=2+|MB|+|MD|\geqslant 2+|BD|$.

又点 B 是圆 $x^2+(y-\sqrt{5})^2=1$ 上的点，圆的圆心为 $C(0,\sqrt{5})$，半径为 1，故 $|BD|\geqslant|CD|-1=\sqrt{10}-1$，从而 $|MA|+|MB|\geqslant 2+|BD|\geqslant\sqrt{10}+1$，

当点 M,B 在线段 CD 上时上式取等号，即 $|MA|+|MB|$ 的最小值为 $\sqrt{10}+1$.

12. 已知 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，动点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，当 a 为 3 和 5 时，点 P 的轨迹分别是　　**正解▶** 选 D.

A. 双曲线和一条直线　　C. 双曲线的一支和一条直线

B. 双曲线和一条射线　　D. 双曲线的一支和一条射线

13. 若方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{|m|-3}=1$ 表示双曲线，求实数 m 的取值范围.

解▶ 依题意有 $\begin{cases}2-m>0,\\|m|-3<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-m<0,\\|m|-3>0,\end{cases}$ 解得 $-3<m<2$ 或 $m>3$.

所以实数 m 的取值范围是 $(-3,2)\cup(3,+\infty)$

14.(□□) 已知 P 是双曲线 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 上一点，F_1，F_2 是双曲线的左、右焦点，且 $|PF_1|=17$，求 $|PF_2|$ 的值.

正解▶ 由双曲线方程$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$可得 $a=8,b=6,c=10$，由双曲线的图象可得点 P 到右焦点 F_2 的距离 $d\geq c-a=2$.

因为 $||PF_1|-|PF_2||=16$，$|PF_1|=17$，所以 $|PF_2|=1$（舍去）或 $|PF_2|=33$.

15. （2016·乙卷（全国卷Ⅰ））已知方程$\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$表示双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为 4，则 n 的取值范围是 **答案▶** A

A. $(-1,3)$　　B. $(-1,\sqrt{3})$

C. $(0,3)$　　D. $(0,\sqrt{3})$

16. (2016·浙江)设双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2. 若点 P 在双曲线上,且 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形,则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围是________.

解析▶ 由题意不妨设点 P 在双曲线的右支上,$\angle F_1PF_2=\theta$ $(0°<\theta<90°)$,由知识点4可知 $|PF_1|+|PF_2|=$ $\sqrt{(|PF_1|-|PF_2|)^2+4|PF_1||PF_2|}=\sqrt{4+\frac{24}{1-\cos\theta}}$,现考虑两种极端情况:当 $PF_2\perp x$ 轴时,$\cos\theta=\frac{3}{5}$,$|PF_1|+|PF_2|$ 有最大值8;当 $\angle P$ 为直角时,$|PF_1|+|PF_2|$ 有最小值 $2\sqrt{7}$. 因为 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形,所以 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围为 $(2\sqrt{7},8)$

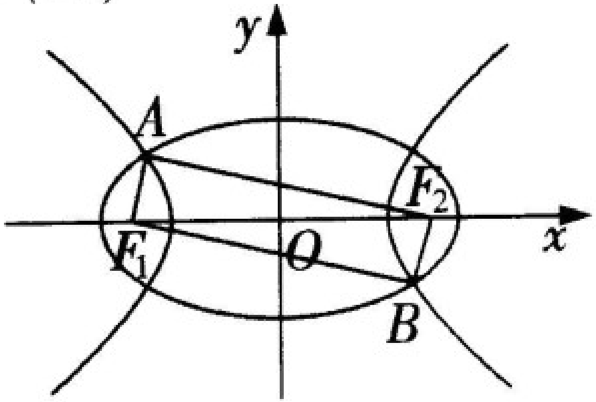
17. (2013·浙江改编)如图 2.3.1－14，F_1，F_2 是椭圆 C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，A，B 分别是 C_1，C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的方程是________.

解析▶ 由椭圆与双曲线的定义可知，$|AF_2|+|AF_1|=4$，$|AF_2|-|AF_1|=2a$，$\therefore |AF_2|=a+2$，$|AF_1|=2-a$.

又四边形 AF_1BF_2 是矩形，$\therefore |AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2=(2\sqrt{3})^2$，$\therefore (2-a)^2+(a+2)^2=12$，解得 $a=\sqrt{2}$，

则 $b^2=c^2-a^2=3-2=1$，

故双曲线 C_2 的方程是$\frac{x^2}{2}-y^2=1$.



18. (2013·新课标全国Ⅱ)在平面直角坐标系 xOy 中,已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$,在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$.

(1)求圆心 P 的轨迹方程;

(2)若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,求圆 P 的方程.

解析▶(1)设 $P(x,y)$,圆 P 的半径为 r.

由题意得$\begin{cases} x^2+3=r^2, \\ y^2+2=r^2, \end{cases}$从而 $y^2+2=x^2+3$.

故 P 点的轨迹方程为 $y^2-x^2=1$.

(2)设 $P(x_0,y_0)$,由已知得$\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 P 点在双曲线 $y^2-x^2=1$ 上,从而得$\begin{cases}|x_0-y_0|=1,\\ y_0^2-x_0^2=1.\end{cases}$

由 $\begin{cases}x_0-y_0=1,\\ y_0^2-x_0^2=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_0=0,\\ y_0=-1,\end{cases}$ 此时,圆 P 的半径 $r=\sqrt{3}$.

由$\begin{cases}x_0-y_0=-1,\\ y_0^2-x_0^2=1,\end{cases}$得$\begin{cases}x_0=0,\\ y_0=1,\end{cases}$此时,圆 P 的半径 $r=\sqrt{3}$.

故圆 P 的方程为 $x^2+(y-1)^2=3$ 或 $x^2+(y+1)^2=3$.